FUNDAÇÃO
GETULIO VARGAS

EPGE
Escola de Pós-Graduação
em Economia

Ensaios Econômicos

Escola de
Pós-Graduação
em Economia
da Fundação
Getulio Vargas

N° 691 ISSN 0104-8910

Uma classe de preferências convexas sem representação côncava

Paulo Klinger Monteiro

Fevereiro de 2009

URL: http://hdl.handle.net/10438/2194

Klinger Monteiro, Paulo
Uma classe de preferências convexas sem representação côncava/ Paulo Klinger Monteiro - Rio de Janeiro : FGV,EPGE, 2010
(Ensaios Econômicos; 691)

Inclui bibliografia.

CDD-330

Uma classe de preferências convexas sem representação côncava

P.K. Monteiro[a,1]

[a]*FGV-EPGE, Praia de Botafogo 190, sala 1103*
22250-900 Rio de Janeiro, RJ

Resumo

Eu demonstro que preferências convexas com curvas de indiferença afins não tem representação côncava se pelo menos duas curvas não forem paralelas. Em outras palavras, relações de preferências com curvas de indiferença afins que têm representação côncava tem representação linear: existe $b \in \mathbb{R}^l_{++}$ tal que $V(x) = \sum_{i=1}^{l} b_i x_i$ representa a relação de preferências.

1. Introdução

Toda relação de preferências contínua e convexa em $\mathbb{R}^l_+$ possui uma representação contínua $U : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ que é quase-côncava. É natural perguntarmos se a relação de preferências possui uma representação côncava. O primeiro trabalho neste assunto é de Finetti (1949). Fenchel (1953) aprofunda o estudo e apresenta condições necessárias e suficientes para representabilidade. Essas condições não são fáceis de se aplicar. Fenchel também considera representações suaves[2] que é mais fácil de se aplicar. Mais recentemente Kannai (1977) apresenta um extenso estudo da concavificabilidade. As condições de Kannai também não são fáceis de se aplicarem. Um bom exemplo de relação de preferências sem representação côncava aparece em Arrow e Enthoven (1961) na nota de rodapé 6 pag. 781. A função $U(x, y) = x - 1 + \sqrt{(1-x)^2 + 4(x+y)}$ é quase-côncava, estritamente monótona. A curva de indiferença $U^{-1}(u)$ é o segmento de reta que liga $(u/2, 0)$ e $\left(0, \frac{u^2+2u}{4}\right)$.

[1]Eu agradeço o apoio financeiro do CNPq.

[2]Veja o teorema 2 abaixo.

Eles citam que Fenchel (1953) demonstra que uma tal função não tem representação côncava. Não está claro entretanto se eles pensam em representações em geral ou representações suaves. É fácil de se checar que esta função não tem representação diferenciável. Um outro exemplo aparece em Schummer (1998). Analiticamente é dado por $U(x,y) = \frac{2x}{2-y}, 0 \leq x, y \leq 1$. As curvas de indiferença são a parte do segmento de reta ligando $(u, 0)$ e $(0, 2)$ que intersecta $[0, 1]^2$. Para verificar que este exemplo não tem representação ele mostra que a inclinação de uma representação côncava u é infinita em $(0, 1)$. Então pela simetria do problema a inclinação em $(x, 1)$ na direção do gradiente é também infinita. Isto não é possível pois uma função côncava tem inclinação limitada para todo ponto interior. O exemplo em Schummer tem o mesmo sabor[3] que o exemplo em Aumann (1975) Fig. 8 pag. 629. Aumann reporta a Fenchel (1956) como fonte do exemplo. O racíocinio em Aumann está baseado no valor da utilidade marginal de uma representação côncava contínuamente diferenciável. Quais tipos de utilidades quase-côncavas não possuem representação côncava? Está claro que ajuda ter curvas de indiferença lineares. Eu demonstro um resultado forte neste ambiente: Primeiramente consideremos o caso bi-dimensional. Eu demonstro que se as curvas de indiferença são lineares e duas não são parelelas então não existe representação côncava (diferenciável ou não). Mais geralmente em dimensões maiores se as curvas de indiferença são variedades afins e duas dessas variedades não são parelelas então não existe representação côncava. Em outras palavras: Uma relação de preferências com curvas de indiferença afins que tem representação côncava é na verdade representada por uma utilidade linear: existe $b \in \mathbb{R}^l_{++}$ tal que $V(x) = b \cdot x$ representa a preferência.

2. Definições básicas e resultados auxiliares

Seja $X \subset \mathbb{R}^l_+$ um conjunto convexo. Uma função $U : X \to \mathbb{R}$ é quase-côncava se $\{x \in X; U(x) \geq u\}$ for convexo para todo u. Ela é côncava se $U(rx + (1-r)y) \geq rU(x) + (1-r)U(y)$ para todo $x, y \in X$ e $0 < r < 1$. É fácil de se checar que toda função côncava é quase-côncava.

Definição 1. *A função quase-côncava U tem representação côncava (ou é concavificável) se existir uma função estritamente crescente $f : U(X) \to \mathbb{R}$ tal que $f \circ U$ seja côncava.*

[3]As curvas de indiferença intersectam um ponto fixo em ambos exemplos.

Seja $U : X \to \mathbb{R}$ quase-côncava e contínua. Seja $M := -\mathbb{R}^l_+$.

Definição 2. *Para cada* $v \in M$ *e* $u \in U(X)$ *defina*

$$h(u, v) = \sup\{x \cdot v; U(x) \geq u\}.$$

Note que $h(u, v) \leq 0$ pois $X \subset \mathbb{R}^l_+$. O lema a seguir é uma versão simplificada do lema mais geral de Fenchel (1953, pág. 123 § 53).

Lema 1 (Fenchel). *Suponha* $f : U(X) \to I$ *estritamente crescente, contínua e sobrejetora. Seja* $g := f^{-1} : I \to U(X)$ *sua inversa. Se* $f \circ U$ *for côncava então* $\theta(z) := h(g(z), v)$ *é côncava para todo* $v \in M$.

Demonstração: Sejam $z', z'' \in I$ e $0 < r < 1$. Para dado $\epsilon > 0$ existem $x', x'' \in X$ tais que

$$\begin{gathered} x' \cdot v > h(g(z'), v) - \epsilon, U(x') \geq g(z'), \\ x'' \cdot v > h(g(z''), v) - \epsilon, U(x'') \geq g(z''). \end{gathered}$$

Portanto se $s = 1 - r$,

$$f(U(rx' + sx'')) \geq rf(U(x')) + sf(U(x'')) \geq rz' + sz''$$

e logo $U(rx' + sz'' \geq g(rz' + sz'')$. Portanto

$$h(g(rz' + sz''), v) \geq (rx' + sx'') \cdot v \geq h(g(z'), v) + h(g(z''), v) - 2\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário terminamos a demonstração.

Definição 3. *Um conjunto não-vazio* $A \subset \mathbb{R}^l$ *é afim se for a translação de um subespaço vetorial. Ou seja* $A = a + V$ *sendo* V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^l$*. O conjunto afim* A *tem codimensão* 1 *se* V *tem codimensão* 1*.*

Todo conjunto afim de codimensão 1 é da forma $\{x \in \mathbb{R}^l; x \cdot b = \tau\}$ para algum $b \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ e $\tau \geq 0$.

Definição 4. *A função utilidade* $U : X \to \mathbb{R}$ *tem curvas de indiferença afins se para todo* $u \in U(X)$ *tivermos* $U^{-1}(u) = H(u) \cap X$ *sendo* $H(u)$ *afim de codimensão 1.*

O próximo lema é fundamental.

Lema 2. *Sejam I e J intervalos abertos. Suponha que $g : I \to J \subset (0, \infty)$ e $\phi : J \to (0, \infty)$ são estritamente crescentes e que $g(I) = J$. Suponhamos também que para todo $k > 0$ a função*

$$I \ni z \to \min \{g(z), k\phi(g(z))\}$$

seja convexa. Então existe $t > 0$ tal que $\phi(u) = tu$ para todo $u \in J$.

A demonstração está no apêndice.

3. Teorema central

Seja $b(u) \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ e $\tau(u) > 0$ funções definidas para $u \in (0, \infty)$. O conjunto

$$H(u) = \left\{x \in \mathbb{R}^l; b(u) \cdot x = \tau(u)\right\}$$

é afim de codimensão um. Dividindo por $\tau(u)$ vemos que, sem perda de generalidade, podemos supor $\tau(u) \equiv 1$. E portanto

$$H(u) = \left\{x \in \mathbb{R}^l; b(u) \cdot x = 1\right\}. \qquad (*)$$

Lema 3. *Seja $U : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ estritamente monótona tal que $U(0) = 0$. Suponhamos também que $U^{-1}(u) \neq \emptyset$ é afim para todo $u > 0$. Seja $U^{-1}(u) = H(u) \cap \mathbb{R}^l_+$ sendo $H(u)$ definida em (*). Então $b_i(u)$ é estritamente decrescente para $u > 0$, contínua e sobre $(0, \infty)$. Além disso U é quase-côncava e contínua.*

A demonstração está no apêndice.

Teorema 1. *Seja $U : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}_+$ sobre, estritamente monótona com curvas de indiferença afins. Se U tem uma representação côncava existe $b \in \mathbb{R}^l_{++}$ tal que $V(x) = b \cdot x$ representa U.*

Demonstração: Seja $\phi_i(u) = 1/b_i(u)$ para $u > 0$. Então ϕ_i é contínua, estritamente crescente e sobre $(0, \infty)$. Seja $v = (-k_1, \ldots, -k_l) << 0$. Então

$$\max\left\{-\sum_i x_i k_i; U(x) \geq u\right\} = \max\left\{-\sum_i x_i k_i; U(x) = u\right\}.$$

A linearidade de $U^{-1}(u)$ implica que

$$\max\left\{-\sum_i x_i k_i \ , \ \sum_{i=1}^{l}\frac{x_i}{\phi_i(u)}=1\right\}$$
$$=-\min\left\{\sum_i x_i k_i \ , \ \sum_{i=1}^{l}\frac{x_i}{\phi_i(u)}=1\right\}=-\min_i k_i\phi_i(u).$$

O lema de Fenchel implica que $-\min_i k_i\phi_i(g(z))$ seja côncava. E portanto $\min_i k_i\phi_i(g(z))$ é convexa. Fixemos $k_1=1$ e $j\neq 1$. Fazendo $k_i\to\infty$ para todo $i\neq j$ obtemos que

$$\min\{\phi_1(g(z)), k_j\phi_j(g(z))\}$$

é convexa para todo $k_j>0$. Definindo $\tilde{g}=\phi_1\circ g$ temos que

$$\min\left\{\tilde{g}(z), k_j\phi_j\circ\phi_1^{-1}(\tilde{g}(z))\right\}$$

é convexa para todo $k_j>0$. Lema (2) implica que $\phi_j\circ\phi_1^{-1}(u)=t_j\ u$ para algum $t_j>0$. E portanto $\phi_j(u)=t_j\phi_1(u)$ pois $\phi_1(\mathbb{R}_{++})=\mathbb{R}_{++}$. Assim

$$U^{-1}(u)=\left\{x>>0;\sum_{i=1}^{l}\frac{x_i}{\phi_i(u)}=1\right\}=\left\{x>>0;\sum_{i=1}^{l}\frac{x_i}{t_i}=\phi_1(u)\right\}$$

e portanto $\phi_1^{-1}(U(x))=\sum_{i=1}^{l}\frac{x_i}{t_i}$ é uma função linear. QED

4. Representações C^2.

Um resultado mais simples de não concavificabilidade pode ser obtido se nos restringirmos a representações duas vezes diferenciáveis.

Teorema 2. *Suponhamos que $U:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ tem curvas de indiferenças lineares, é quase-côncava e tem Hessiano negativo. Então ela não tem representação côncava que seja duas vezes diferenciável.*

Demonstração: Seja $V(x,y)=\phi(U(x,y))$ sendo ϕ estritamente crescente e duas vezes diferenciável. Para calcular o Hessiano seja $\phi' := \phi'(U(x,y))$ e notemos que $V_x=\phi'\ U_x$, $V_y=\phi'\ U_y$ e

$$\begin{aligned}V_{xx}&=\phi''\ U_x^2+\phi'\ U_{xx}\\ V_{yy}&=\phi''\ U_y^2+\phi'\ U_{yy}\\ V_{xy}&=\phi''\ U_yU_x+\phi'\ U_{xy}.\end{aligned}$$

Agora

$$V_{xx}V_{yy}-V_{xy}^2=\left(\phi''U_x^2+\phi'U_{xx}\right)\left(\phi''U_y^2+\phi'U_{yy}\right)-\left(\phi''U_yU_x+\phi'U_{xy}\right)^2=$$
$$\phi''\phi'\left(U_{yy}U_x^2+U_{xx}U_y^2-2U_xU_yU_{xy}\right)+\phi'^2\left(U_{xx}U_{yy}-U_{xy}^2\right)$$
$$=\phi'^2\left(\ U_{xx}U_{yy}-\ U_{xy}^2\right).$$

pois $U_{yy}U_x^2+U_{xx}U_y^2-U_xU_yU_{xy}=0$ quando as curvas de indiferença são lineares. Agora escolhendo (x,y) tal que $\phi'(U(x,y))\neq 0$ podemos concluir que V não é côncava pois o Hessiano de V é negativo.

Demonstrações omitidas no texto

Lema 2:

Fazendo $k\to\infty$ obtemos que a convexidade de $g(\cdot)$. Dividindo por k e fazendo $k\to 0$ obtemos a convexidade de $\phi\circ g(\cdot)$. Portanto g e $\phi\circ g$ são contínuas em I e diferenciáveis exceto num conjunto enumerável. Além disso como g é estritamente crescente e convexa $g'(z)>0$ sempre que existir. Portanto g^{-1} é derivável exceto num conjunto enumerável e portanto $\phi=(\phi\circ g)\circ g^{-1}$ é diferenciável exceto num conjunto enumerável também. Seja $\tilde{I}$ o subconjunto de I no qual $g'(i)>0$ e $(\phi\circ g)'(i)>0$. Então $I\setminus\tilde{I}$ é enumerável. Suponhamos agora que $\phi'(u)>\phi(u)/u$ num subconjunto não-enumerável de J. Então existe $u^0=g(z^0)$ tal que

$$\phi'\left(u^0\right)>\frac{\phi\left(u^0\right)}{u^0}\text{ e }g'\left(z^0\right)>0.$$

Seja k tal que $u^0=k\phi(u^0)$. Como

$$\frac{d}{dz}\left(g(z)-k\phi(g(z))\right)|_{z=z^0}=g'\left(z^0\right)-k\phi'\left(u^0\right)g'\left(z^0\right)=$$
$$kg'\left(z^0\right)\left(\frac{\phi\left(u^0\right)}{u^0}-\phi'\left(u^0\right)\right)<0$$

temos

$$\begin{cases} g(z)>k\phi(g(z)) & \text{se } z<z^0\\ g(z)<k\phi(g(z)) & \text{se } z>z^0\end{cases}$$

Assim a convexidade de $\min\{g(z),k\phi(g(z))\}$ implica que $k(\phi\circ g)'(z^0)\leq g'(z^0)$. E portanto

$$g'\left(z^0\right)=k\frac{\phi\left(u^0\right)}{u^0}g'\left(z^0\right)<k\phi'\left(u^0\right)g'\left(z^0\right)\leq g'\left(z^0\right)$$

uma contradição. Agora se $\phi'(u) < \phi(u)/u$ num conjunto não-enumerável obtemos uma contradição por um raciocínio análogo. Seja $z(u) = \log(\phi(u)) - \log(u)$. Portanto $z(u)$ é contínua tal que $z'(u) = 0$ exceto num conjunto enumerável. O teorema 7.9 pág. 206 de Saks (1964) implica que $z(u)$ seja constante. Escrevendo a constante como $\log(t)$ concluímos que $\phi(u) = tu$.

Comentário 1. *Para demonstrar o ultimo passo acima podemos usar Sard (1958). Se A é o conjunto no qual a derivada de $z(u)$ existe e é nula então o corolário na página 254 de Sard (1958) implica que a imagem tem medida nula. Como A^c é enumerável, temos uma função contínua com imagem de medida nula. Mas a imagem sendo um intervalo então esse intervalo é necessáriamente degenerado.*

Lema 3: Notemos primeiramente que a monotonicidade estrita implica $b(u) >> 0$. Para demonstrar isto suponhamos que $b_i(u) > 0 > b_j(u)$. Se $U(x^0) = u$ então $x = x^0 - b_j(u)e_j + b_i(u)e_i >> x^0$ e $U(x) = u$ uma contradição. Seja $t > 0$. E seja $u = U(te_i)$. Então como $te_i \in H(u)$ temos que $b_i(u)t = 1$. Então $b_i(\mathbb{R}_{++}) = \mathbb{R}_{++}$. De $b_i(U(te_i)) = 1/t$ segue-se que b_i é estritamente decrescente. Uma função monótona com imagem um intervalo é necessáriamente contínua. Demonstremos a quase-côncavidade. Suponhamos $U(x) \geq u$ e $U(y) \geq u$. Se $0 < r < 1$ temos que $b(u) \cdot x \geq b(U(x)) \cdot x = 1$ e $b(u) \cdot y \geq 1$. Então

$$b(u) \cdot (rx + (1-r)y) = rb(u) \cdot x + (1-r)b(u) \cdot y \geq 1$$

implica que $U(rx + (1-r)y) \geq u$. A demonstração da continuidade (que é fácil) será omitida.

Bibliografia

Arrow, K. e A. Enthoven, Quasi-Concave Programming, Econometrica 29 (4), 779-800, 1961

de Finetti, B., Sulle stratificazioni convesse, Annali di Matematica Pura ed Aplicata (4), XXX, 173-183, 1949

Fenchel, W., Convex cones, sets and functions, mimeo, Princeton University, 1953

Fenchel, W., Über konvexe Funktionen mit vorgeschriebenen Niveaumannigfaltigkeiten, Mathematische Zeitschrift, 63, 496-506, (1956)

Kannai, Y., Concavifiability and constructions of concave utility functions, Journal of Mathematical Economics 4, 1-56, 1977

Rockafellar, R. T., Convex Analysis, Princeton Landmarks in Mathematics, 1997, 12ed

Saks, S., Theory of the integral, 1964, Dover Publications, Inc., New York

Sard, A., Images of Critical Sets, Annals of Mathematics v. 68 (2), 247-259, 1958

Schummer, J., A pedagogical example of non-concavifiable preferences, não-publicado, 1998